技術社会システム

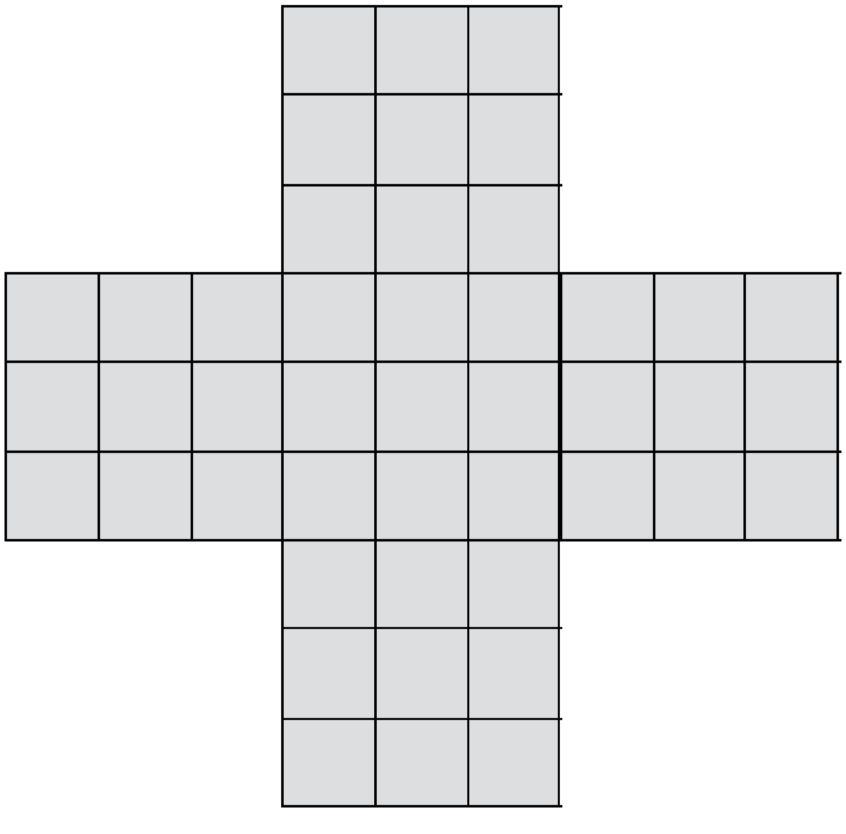
第6回：縮小・分割統治法

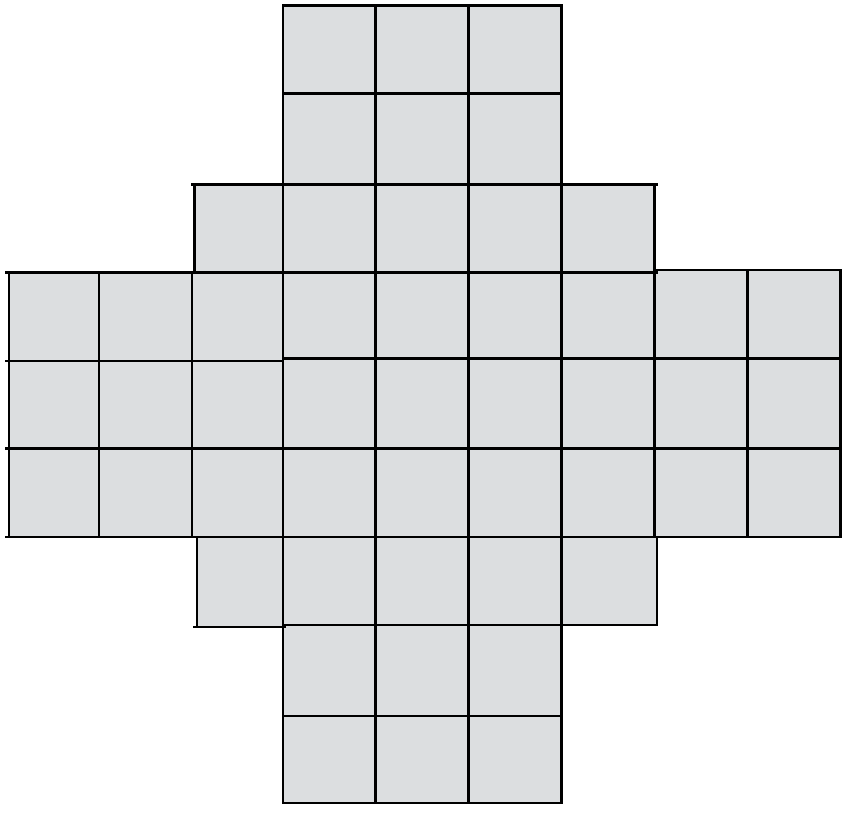
担当教員：蓮池 隆(はすいけ たかし)
連絡先：thasuike@waseda.jp

その前に前回の解答です

演習5-1

- 以下の盤面において，各タイルを一度づつ通過するように一筆書きすることはできるか．できるなら道筋を書き，できないならそれを証明せよ．



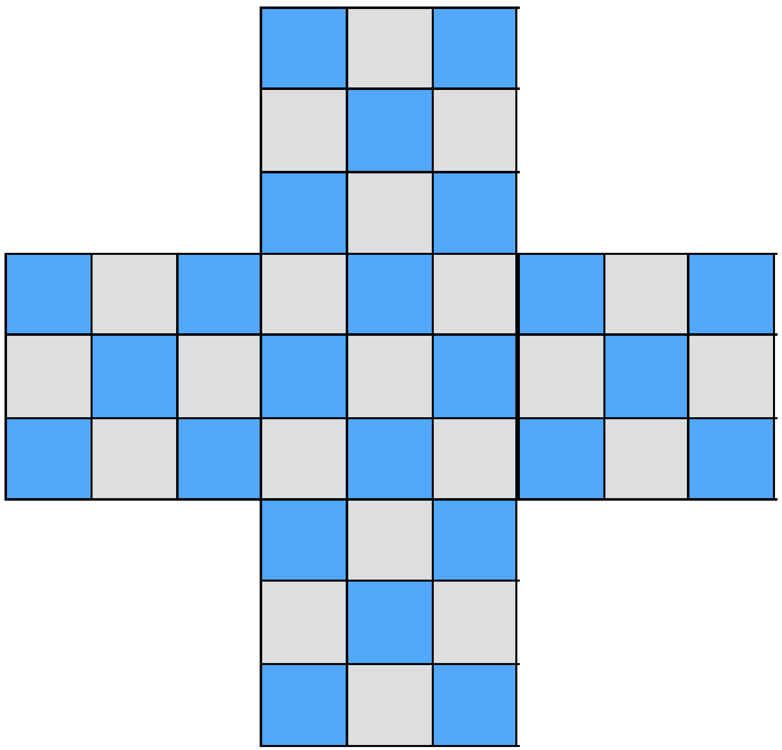


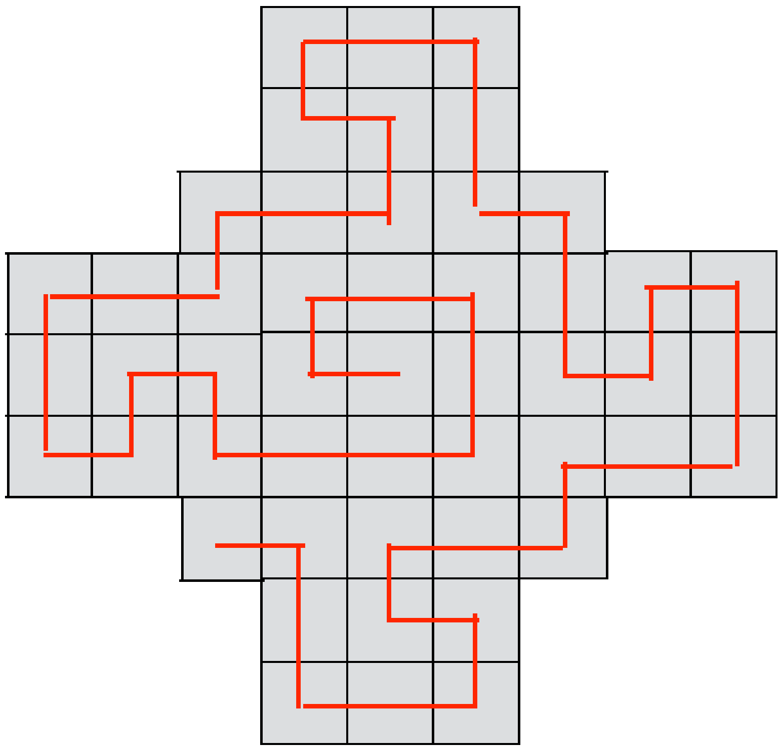
解答

演習5-1

- 交互に色をつけると，左は(青：24，灰色：21)となり，一筆書きでは青色と灰色が交互になるため，青色と灰色が同じ数か1つ違いになる必要がある.

→よって，左は一筆書きできない！

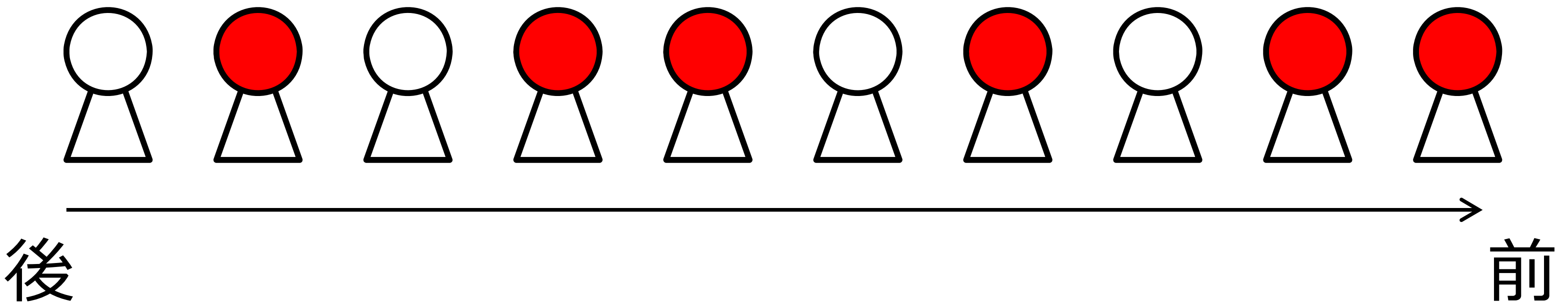




演習5-3(詳細な解説です)

<u>帽子の色当てゲーム</u>

- 10人が1列に整列する.
- 全員に赤か白の帽子をランダムにかぶせる．このとき，各人は自分より前の全ての人の帽子の色が見え，後ろの人の帽子の色は見えない.
- **最後尾から最前列の人まで順番に，自分の帽子の色を“赤”か“白”と１回だけ発声する.** このとき，前の人は後ろの人の発声を聞くことができる.



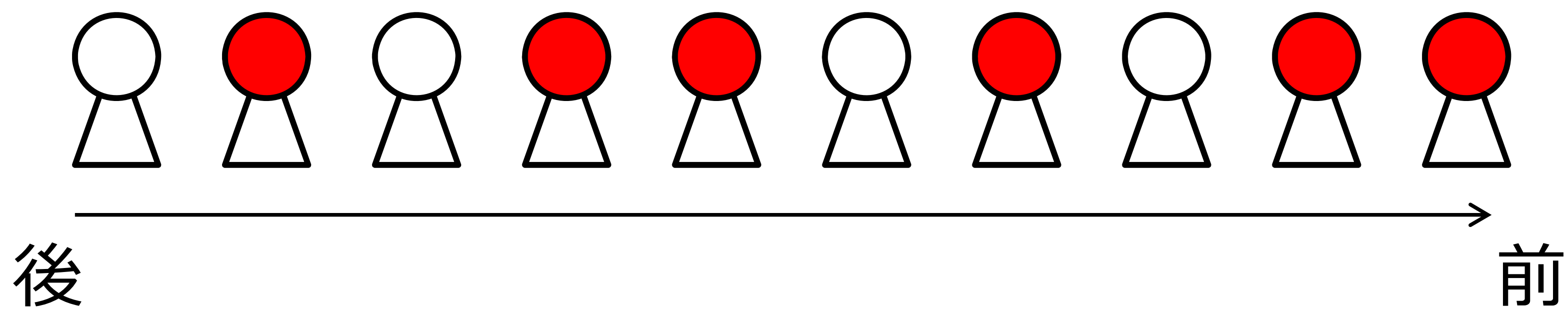
演習5-3(詳細な解説です)

帽子の色当てゲーム

- 発声により自分の帽子の色を当てた人の合計を全体の得点とする.
- 整列後はお互いに相談できないものとする.

(問題)

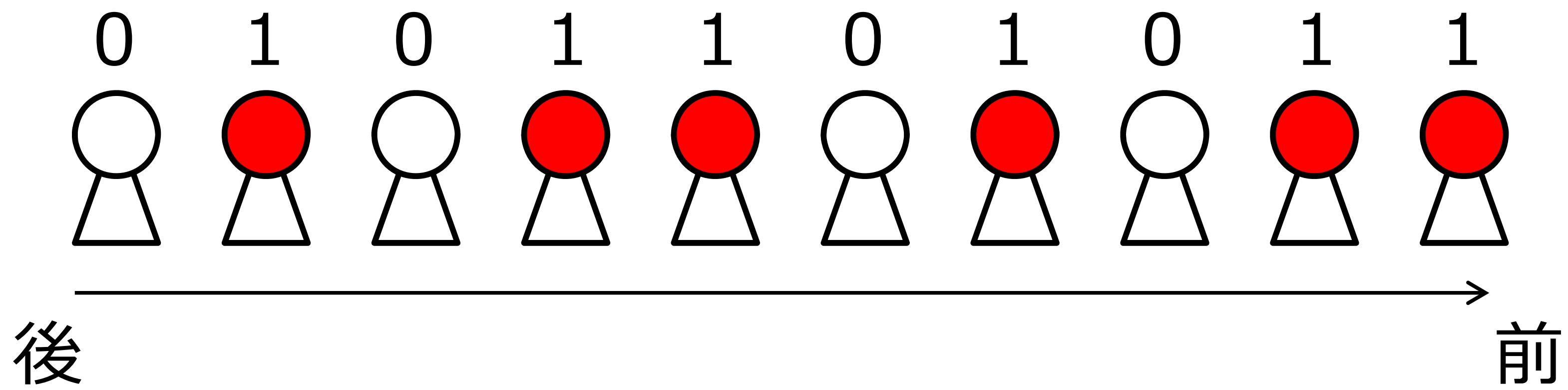
全員が協力すると，確実に取れる得点は最大で何点か？
アルゴリズムも合わせて記しなさい.



ヒント

- 以下のように記号を用意し，どの情報を誰が使えるかを考察してみよう.

- 赤を 1，白を 0 へ変換する.
- H(i) = i 番目の人の帽子の色 (= 0 or 1).
- P(i) = i 番目の人より前の人の帽子の色の総和に(mod 2)を実行したもの
  $= H(i+1) + H(i+2) + \cdots + H(10) \pmod 2$
- Q(i) = i 番目の人が発声した帽子の色 (= 0 or 1).

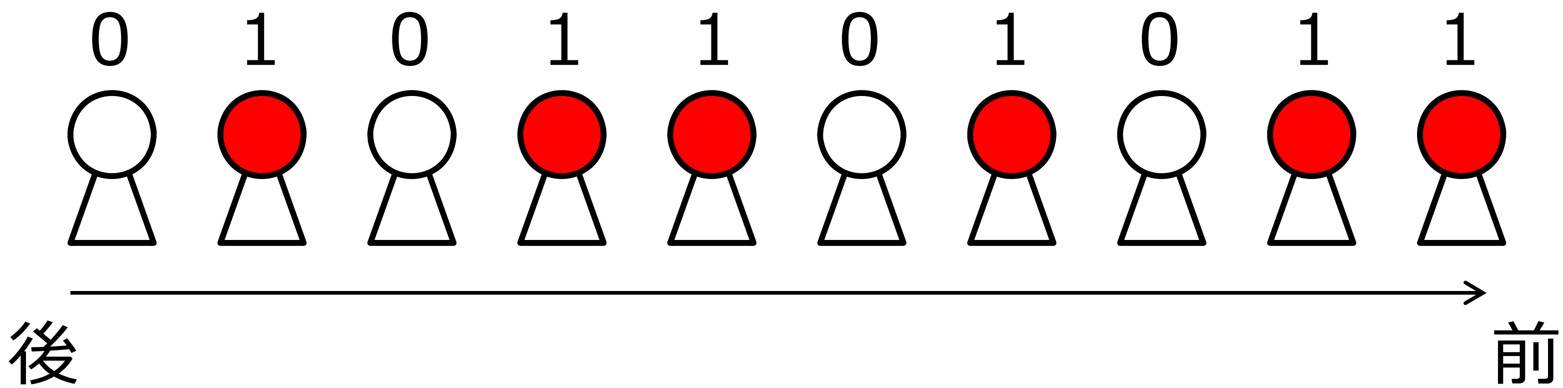


ヒント

- 以下のように記号を用意し，どの情報を誰が使えるかを考察してみよう．

- i 番目の人の目的：H(i) を知ること
- i 番目の人が使える情報：

  Q(1), … , Q(i-1), P(i), H(i+1), …, H(10)



解答

- **確実に9人**は自分の帽子の色を当てることができる.
- ポイント：**赤色の帽子をかぶった人が，奇数or偶数**

アルゴリズム

- 1番目の人：Q(1) = P(1)

  (**赤色が奇数なら1，偶数なら0**)

- i 番目の人(i ≧ 2)：

$$\boxed{Q(i) = Q(1) + Q(2) + \cdots + Q(i-1) + P(i) \pmod 2}$$

つまり，1番目の人が叫んだ結果から「2番目以降の人全体で，赤色の帽子が奇数個なのか偶数個なのか」がわかり，それ以降で「赤と答えた人の人数と自分より前の赤の人の人数の和が奇数か偶数か」で自分の帽子の色がわかる！

解答

- **<u>確実に9人</u>**は自分の帽子の色を当てることができる.
- ポイント：**<u>赤色の帽子をかぶった人が，奇数or偶数</u>**

<u>アルゴリズム</u>

- 1番目の人：Q(1) = P(1)
  (**赤色が奇数なら1，偶数なら0**)
- i 番目の人(i ≧ 2)：

$$\boxed{\mathbf{Q(i) = Q(1) + Q(2) + \cdots + Q(i-1) + P(i) \pmod 2}}$$

(実際に)

$$\mathbf{Q(2)}=Q(1)+P(2)=P(1)+P(2)$$
$$=(H(2)+H(3)+\cdots)+(H(3)+H(4)+\cdots)=\mathbf{H(2)}$$

($\because$ n+n (mod 2)=0なので，H(i)+H(i) (mod 2)=0)

解答

- **確実に9人**は自分の帽子の色を当てることができる.
- ポイント：**赤色の帽子をかぶった人が，奇数or偶数**

アルゴリズム

- 1番目の人：Q(1) = P(1)

  (**赤色が奇数なら1，偶数なら0**)
- i 番目の人(i ≧ 2)：

$$\boxed{Q(i) = Q(1) + Q(2) + \cdots + Q(i-1) + P(i) \pmod 2}$$

Q(3)=Q(1)+Q(2)+P(3)=(Q(1)+P(3))+H(2)

=(P(1)+P(3))+H(2)

=((H(2)+H(3)+⋯)+(H(4)+H(5)+⋯))+H(2)

=(H(2)+H(3))+H(2) = **H(3)**, ⋯(これが続く)

縮小・分割統治法

縮小統治法

分割統治法

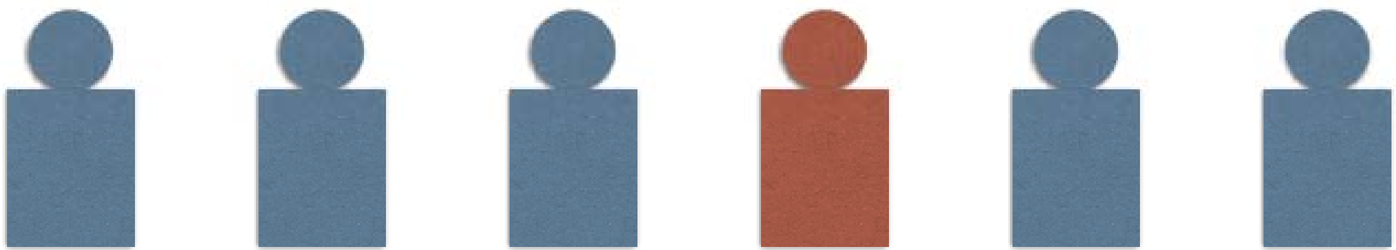
➡これらの考え方は幅広い問題に対して有効！

それでは演習です

演習6-1

- n人のグループの中に有名人が1人だけいる.
- その有名人はグループ内に誰も知人はいないが，他のすべての人はその有名人を知っている.
- このとき，グループから2人を選び，どちらか一方の人に，もう一方を知っているかを尋ねることができるとする.

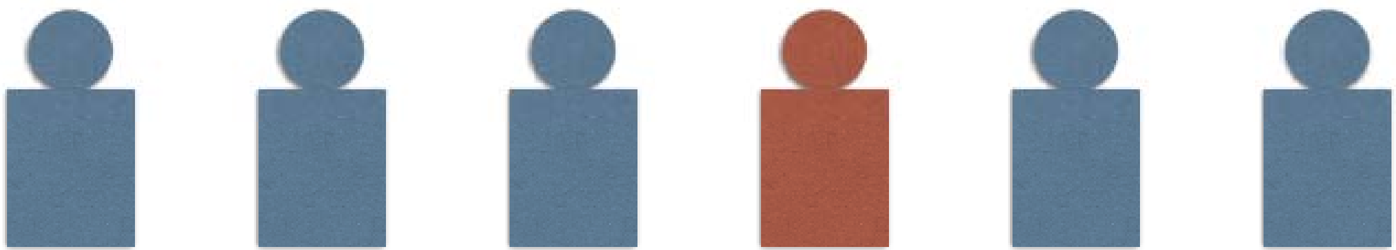
- この質問のみを用いて有名人を見つける方法を示せ.
また，有名人を確実に見つけるには最小で何回の質問が必要か？



解答例

演習6-1

- 操作：二人a, bを無作為に選び，aにbを知っているかを尋ね，以下を行う:
  - aがbを知っている ➡ aは有名人ではないので，
    aをグループから除く
  - aがbを知らない ➡ bは有名人ではないので，
    bをグループから除く
- **これを1回行うとグループの人数は1人減る(縮小統治法).**
- 繰り返すことで**高々 n-1 回の操作**で有名人を見つけることができる.



続けて縮小統治法の演習です

演習6-2

- Aさんは 1 から 1,000,000 までの数字の中の一つを紙に書いて持っているとする.
- この数を「はい」か「いいえ」で答えられる質問を繰り返し質問していくことで当てる.

(例)　一の位は3ですか？　(←ちなみにこれは非効率的)

1~100,000の間に入ってますか?

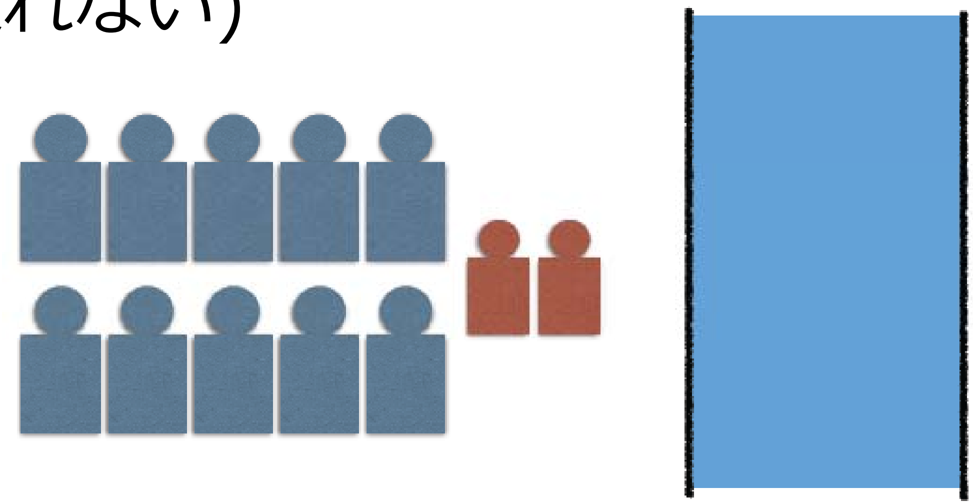
- 最悪の場合でも何回以下の質問数で答えを当てることができるか?

(ヒント：ある戦略にしたがい，範囲をうまく設定しながら聞いていけばよい**(縮小統治法)**)

続けて演習です

演習6-3

- 大人10名，子供2名の集団が川の片側におり，一隻の船のみを用いて川を渡ろうとしています．
- 以下の条件の下で，船を何度使用すれば全員が川を渡れますか？ただし，一方の岸から他方の岸への移動をするごとに，船を一度使用したこととみなす．
- 条件：船は子供1名でも動かせる．また船に同時に乗れる人数は大人は1名まで，子供は2名まで．(大人が1名乗ると子供は乗れない)



続けて演習です

<u>演習6-3</u>

- 大人10名，子供2名の集団が川の片側におり，一隻の船のみを用いて川を渡ろうとしています．
- 以下の条件の下で，船を何度使用すれば全員が川を渡れますか？ただし，一方の岸から他方の岸への移動をするごとに，船を一度使用したことみなす．
- 条件：船は子供1名でも動かせる．また船に同時に乗れる人数は大人は1名まで，子供は2名まで．

- ヒント：最初から何回か試行してみると，様子がわかってくるかも…?!